高年级组练习册

1. (2007 年迎春杯复赛高年级组第 1 题)

定义 $a \triangle b$ 表示 $a \times b$ 的整数部分，例如：$3.5 \triangle 1.5 = 5$.

计算：$(199 \triangle \pi) + [199 \Delta (4-\pi)] =$_______.

【考点】计算，定义新运算

【难度】☆☆

【答案】795

【分析】$199\pi + 199(4-\pi) = 199 \times 4 = 796$，而 199π、$199(4-\pi)$ 均是小数，则两个数整数部分相加为 795.

2. (2007 年迎春杯复赛高年级组第 2 题)

对于每个不小于 1 的整数 n，令 a_n 表示 $1+2+3+\cdots+n$ 的个位数字．例如 $a_1 = 1$，$a_2 = 3$，$a_4 = 0$，$a_5 = 5$，则 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2007} =$_______.

【考点】计算，周期

【难度】☆☆☆

【答案】7024

【分析】1、3、6、0、5、1、8、6、5、5、6、8、1、5、0、6、3、1、0、0、1、3、……

20 个数一个周期：$2007 \div 20 = 100 \text{组} \cdots 7$，每组数和为 70，前 7 个数之和为 24，

则 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2007} = 70 \times 100 + 24 = 7024$

3. (2008 年迎春杯复赛高年级组第 5 题)

计算：$\left(\frac{1}{1\times 2007} + \frac{1}{2\times 2006} + \cdots + \frac{1}{n\times(2008-n)} + \cdots + \frac{1}{2006\times 2} + \frac{1}{2007\times 1}\right) - \frac{2007}{2008}$

$\left(\frac{1}{1\times 2006} + \frac{1}{2\times 2005} + \cdots + \frac{1}{n\times(2007-n)} + \cdots + \frac{1}{2006\times 1}\right) =$_________.

【考点】计算，分数裂项

【难度】☆☆☆☆☆

【答案】$\frac{1}{2015028}$

【分析】设原式 $= x$，则：

$$2008x = \left(\frac{2008}{1\times 2007} + \frac{2008}{2\times 2006} + \cdots + \frac{2008}{2007\times 1}\right) - \left(\frac{2007}{1\times 2006} + \frac{2007}{2\times 2005} + \cdots + \frac{2007}{2006\times 1}\right)$$

$=(\frac{1}{1}+\frac{1}{2007}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2006}+\cdots+\frac{1}{2007}+\frac{1}{1})-(\frac{1}{1}+\frac{1}{2006}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2005}+\cdots+\frac{1}{2006}+\frac{1}{1})$

$=2\times(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2007})-2\times(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2006})$

$=\frac{2}{2007}$

则原式 $x=\frac{2}{2007\times2008}=\frac{1}{2015028}$

4. (2009 年迎春杯复赛高年级组第 1 题)

$21\frac{21}{286}\div6\frac{647}{2530}\times1\frac{1370}{2829}=$__________.

【考点】计算，约分

【难度】☆☆☆

【答案】5

【分析】原式 $=21\times1\frac{1}{286}\div\frac{15827}{2530}\times\frac{4199}{2829}$

$=21\times\frac{287}{286}\times\frac{2530}{15827}\times\frac{4199}{2829}$

$=21\times\frac{7\times41}{2\times11\times13}\times\frac{2\times5\times11\times23}{7\times7\times323}\times\frac{13\times323}{3\times23\times41}$

$=5$

5. （2011 年迎春杯复赛高年级组）

从 1999 年到 2010 年的 12 年中，物价涨幅为 150%（即 1999 年用 100 元能购买的物品，2010 年要比原来多花 150 元才能购买）．若某个企业的一线员工这 12 年来工资都没变，按购买力计算，相当于工资下降了_______%．

【难度】☆☆

【答案】52

【分析】1999 年到 2011 年：

工资：100 元→100 元

物价：100 元→250 元

按购买力，工资下降了 $\frac{250-100}{250}\times100\%=60\%$

【点评】经济应用题是六年级专有考点，所以不论初赛还是复赛都是高频考点.

6. 两个杯子里分别装有浓度为 40%与 10%的盐水，将这两杯盐水倒在一起混合后，盐水浓度变为 30%．若再加入 300 克 20%的盐水，浓度变为 25%．请问：原有 40%的盐水多少克？

【难度】☆☆☆

【答案】200

【分析】设原有 40%和 10%的盐水分别 x 千克和 y 千克，

第一次混合成 30%：$\frac{x}{y}=\frac{30\%-10\%}{40\%-30\%}\Rightarrow x=2y$

第二次混合成 25%：$\frac{x+y}{300}=\frac{25\%-20\%}{30\%-25\%}\Rightarrow x+y=300$

联立：$\begin{cases}x=2y\\x+y=300\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=200\\y=100\end{cases}$，原有 40%的盐水 200 克.

7. （2011 年迎春杯复赛高年级组）

某届“数学解题能力展示”读者评选活动初试共有 12000 名学生参加，分为初中、小学高年级、小学中年级三个组别．小学的两个组共占总人数的 $\frac{15}{16}$，不是小学高年级组的占总人数的 $\frac{1}{2}$．那么小学中年级组参赛人数为__________.

【难度】☆☆

【答案】5250

【分析】小中+小高=$12000\times\frac{15}{16}=11250$ 人

小中+初中=$12000\times\frac{1}{2}=6000$ 人

小中=$11250+6000-12000=5250$ 人

8. （2006 年迎春杯复赛高年级组）

下图中，四边形 $ABCD$ 都是边长为 1 的正方形，E，F，G，H 分别是 AB，BC，CD，DA 的中点，如果图 1 中阴影部分与图 2 中阴影部分的面积之比是最简分数 $\frac{m}{n}$，那么 $(m+n)$ 的值等于________.

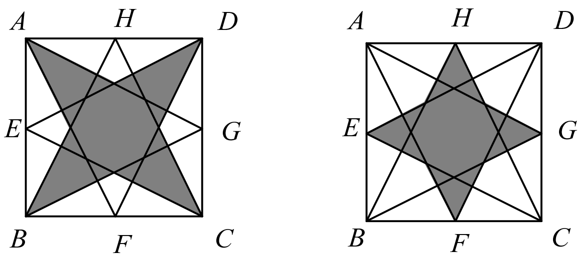


图1 图2

【难度】☆☆☆

【答案】5

【分析】求图 1 空白面积的占比：$\frac{1}{8}\times4=\frac{1}{2}$（连接 EG 后，空白 ΔBOC 占总面积的 $\frac{1}{8}$，如图 1）

求图 2 空白面积的占比：$\frac{1}{6}\times4=\frac{2}{3}$（燕尾：空白四边形 $EBFO$ 占总面积的 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，如图 2）

则两部分阴影的面积之比为：$\frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$，则 $m+n=3+2=5$

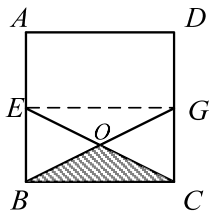


图1

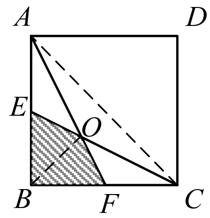
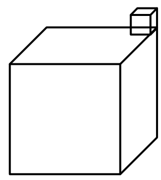


图2

9. （2010 年迎春杯复赛高年级组）

如图所示，有大小不同的两个正方体，大正方体的棱长是小正方体棱长的 6 倍．将大正方体的 6 个面都染上红色，将小正方体的 6 个面都染上黄色，再将两个正方体粘合在一起．那么这个立体图形表面上红色面积是黄色面积的____________倍．



【难度】☆☆

【答案】43

【分析】设小棱长为 1，则大棱长为 6；则黄色面积是红色面积的 $\frac{6\times6\times6-1\times1}{1\times1\times5}=43$

10. （2008 年迎春杯复赛高年级组）

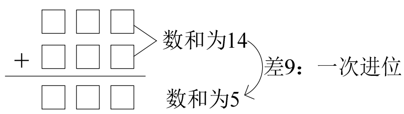
如果三位数 m 同时满足如下条件：⑴ m 的各位数字之和 7；⑵ $2m$ 还是三位数，且各位数字之和为 5．那么这样的三位数 m 共有_________个.

【难度】☆☆☆

【答案】6

【分析】如下图所示，推知这个加法有一次进位，这说明 m 的个位或十位不小于 5，据此枚举如下：

数和为 7：106、115、151、160、205、250 共 6 种情况.



【点评】在加法数字谜中："进位次数"与"数码和损失"存在对应关系；

设进位次数为 n，则"加数的数码和"-"和的数码和"=9n

11. （2007 年迎春杯复赛高年级组）

由数字 1，2，3 组成五位数，要求这五位数中 1，2，3 至少各出现一次，那么这样的五位数共有_____个.

【难度】☆☆☆

【答案】150

【分析】1,2,3 中有一个数字出现 3 次：$C_3^1\times5\times4=60$ 个；

1,2,3 中有两个数字各出现 2 次：$C_3^2\times5\times C_4^2=120$ 个；

符合题意的五位数共有 $60+90=150$ 个.

12. （2007 年迎春杯复赛高年级组）

将 1~999 这 999 个自然数排成一行（不一定按从大到小或从小到大的顺序排列），得到一个 2889 位数，那么数字串“123”最多能出现________次.

【难度】☆☆☆☆

【答案】23

【分析】分四类讨论

123:1 种

□1＋23□：11 种（23、230-239）

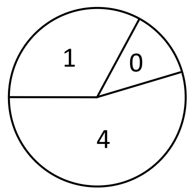
□12＋3□：10 种（12、112、212、312...912）

□1＋2＋3□：1 种（只有一个 2）

所以共：1+11+10+1=23 种

13. （2009 年迎春杯复赛高年级组）

在新年联欢会上，某班组织了一场飞镖比赛．如右图，飞镖的靶子分为三块区域，分别对应 17 分、11 分和 4 分．每人可以扔若干次飞镖，脱靶不得分，投中靶子就可以得到相应的分数．若恰好投在两块（或三块）区域的交界线上，则得两块（或三块）区域中分数最高区域的分数．如果比赛规定恰好投中 120 分才能获奖，要想获奖至少需要投中__________次飞镖.



【难度】☆☆

【答案】10

【分析】设投中 17 分、11 分和 4 分区域的次数分别为 x、y 和 z，则有 $17x+11y+4z=120$，对 $0\le x\le 7$ 进行讨论可知：$x=4, y=4, z=2$ 时 $x+y+z=10$ 为最小值.

【点评】代数化是重要的解题步骤

14. （2011 年迎春杯六年级初赛）

一个正整数，它的 2 倍的约数恰好比自己的约数多 2 个，它的 3 倍的约数恰比它自己的约数多 3 个，那么，这个正整数是_________.

【难度】☆☆☆☆

【答案】12

【分析】这个数只能 2 和 3 两种质因数，如果它还有别的因子，例如 5，那么扩 2 倍或 3 倍后增加的约数个数将比给定的数字大，

设 $x=2^a\times 3^b$，它的约数个数为 $(a+1)(b+1)$ 个，

它的 2 倍的约数个数为 $(a+2)(b+1)$ 个，它的 3 倍的约数个数为 $(a+1)(b+2)$ 个；

则有 $\begin{cases}(a+2)(b+1)-(a+1)(b+1)=2\Rightarrow b+1=2\Rightarrow b=1\\(a+1)(b+2)-(a+1)(b+1)=3\Rightarrow a+1=3\Rightarrow a=2\end{cases}\Rightarrow x=2^2\times 3^1=12$

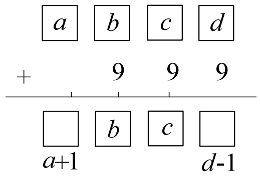
15. （2008 年迎春杯复赛高年级组）

记四位数 $\overline{abcd}$ 为 X，由它的四个数字 a，b，c，d 组成的最小的四位数记为 X^*，如果 $X-X^*=999$，那么这样的四位数 X 共有_________个.

【难度】☆☆☆☆

【答案】48

【分析】同上题，X 与 X^* 对 9 同余；差为 999 其数码和为 27，则在做加法时进位三次（见下图）



显然有 $a+1=d$

当 $\begin{cases}a=1\\d=2\end{cases}$ 时，$\overline{abcd}$ 可以是：1002,1012,1022,1112,1122,1222 共 6 种情况

同理，当 a,d 分别为（2,3），（3,4），（4,5），（5,6），（6,7），（7,8），（8,9）时都有 6 种情况，

则 $\overline{abcd}$ 共有 $6\times8=48$ 个

16. （2009 年迎春杯复赛高年级组）

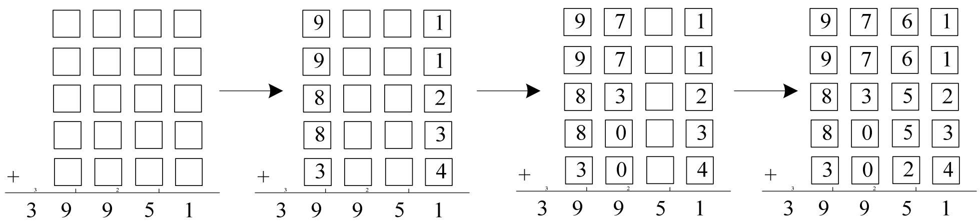
用数字 0、0、1、1、2、2、3、3、4、4、5、5、6、6、7、7、8、8、9、9 组成五个四位数，要求这 5 个数的和的各位数字都是奇数，那么这个和数最大是__________.

【难度】☆☆☆

【答案】39951

【分析】加数数码和为 $45\times2=90$，说明和的数码和也是 9 倍，又因为五个奇数之和为奇数，则数码和只能为 27（排除 36）；万位至多为 3（排除 4）；由此推断和的最大值为 39951．构造如下：

数码和损失：$90-27=63=9\times7\Rightarrow$ 共 7 次进位，其中万位处有 3 次，如下左图为一种进位方式



17. （2007 年迎春杯复赛高年级组）

对于每个不小于 1 的整数 n，令 a_n 表示 $1+2+3+\cdots+n$ 的个位数字. 例如 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_4=0$，$a_5=5$，则 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2007}=$__________.

【难度】☆☆☆

【答案】7024

【分析】1、3、6、0、5、1、8、6、5、5、6、8、1、5、0、6、3、1、0、0、1、3、......

20 个数一个周期：$2007\div20=100$组$\cdots7$，不难算每组和为 70，前 7 个数之和为 24，

则 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2007}=70\times100+24=7024$

18. （2007 年迎春杯复赛高年级组）

甲、乙两人分别从 A、B 两地出发，相向而行（不一定同时出发），甲骑自行车，乙步行．两人在距 A 地 500 米处第一次相遇．甲继续走到 C 地后发现忘带东西，于是将速度提高一倍，立即返回 A 地，并在距 A 地 400 米处追上乙．到达 A 地后不作停留立即前往 B 地，在距 A 地 300 米处与乙第二次相遇，最后两人同时到达目的地．那么 BC 两地相距______米．

【难度】☆☆

【答案】1700

【分析】根据题意绘制如下图：第一次相遇两人出发时刻不同，没有利用价值，故没有画出

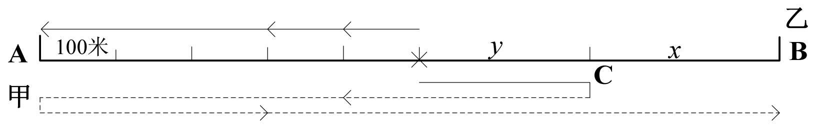
显然每人都有走了三段路

分析第二段:乙走了 100 米的同时，甲走了 700 米．推知：$\dfrac{2v_{甲}}{v_{乙}}=\dfrac{700}{100}=7$

据此设 $v_{乙}=2$，$v_{甲}=7$，$2v_{甲}=14$；

分析第一段：根据时间相等列式 $\dfrac{100}{2}=\dfrac{y}{7}+\dfrac{y+100}{14}\Rightarrow y=200$ 米

分析第三段：根据时间相等列式 $\dfrac{300}{2}=\dfrac{x+y+200}{14}\Rightarrow x=1700$ 米



19. （2008 年迎春杯复赛高年级组）

爸爸买了三个不同的福娃送给三胞胎兄妹．打开包装前，哥哥猜：“一定是有欢欢，而没有晶晶”；弟弟猜：“晶晶和欢欢当中至少有一个，一定没有迎迎”；妹妹猜：“一定有迎迎和妮妮，没有贝贝”；爸爸笑着回答：“你们每个人猜的两句话中，都恰好有一句是对的，有一句是错的”．则三个福娃的名字是_________．

【难度】☆☆

【答案】欢欢+晶晶+迎迎

【分析】假设哥哥说的话中：一定有欢欢（√），没有晶晶（×）；推知有欢欢+晶晶；进而推知：弟弟说的话中：晶晶和欢欢当中至少有一个（√），一定有迎迎（×）；推知有迎迎；

根据欢欢+晶晶+迎迎的组合判断：

妹妹所说的话中：一定有迎迎和妮妮（×），没有贝贝（√）；完全符合要求．

说明最初的假设成立，说明三个福娃就是：欢欢+晶晶+迎迎．

20. （2010 年迎春杯复赛高年级组）

在反恐游戏中，一名“恐怖分子”隐藏在 10 个排成一行的窗户后面，一位百发百中的“反恐精英”使用狙击枪射击这名“恐怖分子”．“反恐精英”只需射中“恐怖分子”所在的窗户就能射中这名“恐怖分子”．每次射击完成后，如果“恐怖分子”没有被射中，他就会向右移动一个窗户．一旦他到了最右边的窗户，就停止移动．为了确保射中这名“恐怖分子”，“反恐精英”至少需要射击_______次．

【难度】☆☆☆

【答案】6

【分析】设从左到右的窗户依次为$a_1,a_2,a_3,\cdots a_{10}$，

方法一（运动战）：依次射击$a_1,a_3,a_5,a_7,a_9,a_{10}$，共 6 枪可确保射中.

方法二（阵地战）：连续射击 5 次a_5，若没有射中最后射击a_{10}必中.