

# 2013年“数学解题能力展示”网络评选活动

## 小学高年级组复试试卷

(测评时间: 2013年2月2日 8:30—10:00)

### 一. 填空题 I (每小题8分, 共40分)

1. 算式  $2013 \div 2.2 \times \left( \frac{4}{3} - \frac{8}{15} \right)$  的计算结果是\_\_\_\_\_.

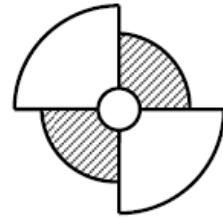
答案: 732 难度: ★☆ 命题者: 《中小学数学教学》 陈平

解析: 原式  $= 2013 \times \frac{5}{11} \times \frac{12}{15} = 732$

2. 右图中, 两个圆心角是  $90^\circ$  的扇形盖在大圆上, 小圆盖在两个扇形上, 它们的圆心都在同一点. 如果小圆、大圆、扇形的半径比是 1:3:4, 那么阴影图形面积占整个图形面积的\_\_\_\_\_%.

答案: 32 难度: ★★ 命题者: 巨人教育 饶海波

解析: 设小圆、大圆、扇形的半径分别是  $r$ 、 $3r$ 、 $4r$ .



整个商标的面积是  $\frac{1}{2}\pi(4r)^2 + \frac{1}{2}\pi(3r)^2 = 12.5\pi r^2$ ;

阴影部分的面积是  $\frac{1}{2}\pi(3r)^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 = 4\pi r^2$ ;

所以, 阴影图形面积占整个商标图形面积的  $\frac{4\pi r^2}{12.5\pi r^2} = 32\%$ .

3. 老师将写有 1~9 的 9 张卡片发给甲、乙、丙 3 个学生, 每人 3 张.

甲说: 我的三张卡片上的数字恰好是等差数列;

乙说: 我的也是;

丙说: 就我的不是等差数列.

如果他们说的都是对的, 那么丙手中拿的三张卡片数字之和最小是\_\_\_\_\_.

答案: 9 难度: ★☆ 命题者: 学而思教育 孙佳俊

解析: 甲、乙三张都是等差数列, 其和一定是 3 的倍数; 9 张和为  $1+2+\dots+9=45$ , 也是 3 的倍数, 所以丙的和一定是 3 的倍数. 丙最小不能取 6 ( $1+2+3$ ), 所以至少为 9. 经试验 9 是可以的, 甲、乙分别为 (9,8,7) 和 (5,4,3), 丙为 (1,2,6).

4. 迎春小学六年级同学在某次体育达标测试中, 达标的有 900 人, 参加测试但未达标的占参加测试的同学人数的 25%, 因故没有参加体育达标测试的占该年级全体同学人数的 4%. 没有参加体育达标测试的有\_\_\_\_\_人.

答案: 50 难度: ★★ 命题者: 《中小学数学教学》 陈平

解析: 参加测试的有  $900 \div (1-25\%) = 1200$  (人),

所以没有参加测试的有  $1200 \div (1-4\%) \times 4\% = 50$  (人).

5. 在右图的除法竖式中，被除数是\_\_\_\_\_.

(2013年的小学“数学解题能力展示”读者评选活动是第29届)

答案：2582 难度：★★☆ 命题者：启明星教育 闵继光

解析：首先可以确定的数如图所示：

乘积个位为3，只有 $\overline{a1} \times 3$ 、 $\overline{a7} \times 9$ 或 $\overline{a9} \times 7$ ：

(1) 若为 $\overline{a1} \times 3$ ， $a$ 只能为6，但此时61乘上一个数不能得到 $\overline{20\square}$ ；

(2) 若为 $\overline{a7} \times 9$ ， $\overline{a7} \times 9 = 9a \times 10 + 63 = \square 83$ ，9a个位应为2， $a$ 只能为8，而87乘上一个数也不能得到 $\overline{20\square}$ ；

(3) 若为 $\overline{a9} \times 7$ ， $\overline{a9} \times 7 = 7a + 63 = \square 83$ ，7a个位为2， $a$ 只能为6，且 $69 \times 3 = 207$ ，满足要求。因此除数为69，商为37，可得到被除数为2582。

## 二. 填空题II（每小题10分，共50分）

6. 算式 $\frac{\frac{1}{1}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}}+\cdots+\frac{\frac{1}{9}-\frac{1}{11}}{\frac{1}{9}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{11}}$ 的计算结果是\_\_\_\_\_.

答案：108 难度：★★☆ 命题者：桦树湾教育 成俊峰

解析：

$$\text{原式} = \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{11} - \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} = 110 - 2 = 108$$

7. 黑板上有1~2013共2013个数，每次可以擦掉其中两个数，并且写上这两数之和的数字和，已知最后黑板上剩下四个数，其乘积为27，那么这四个数的和是\_\_\_\_\_.

答案：30 难度：★★★ 命题者：学而思教育 余飞

解析：一个数除以9的余数等于这个数各位数字之和除以9的余数。每次操作将数的和变为数字和，不改变除以9的余数。 $1+2+3+\cdots+2013=2014\times2013\div2=1007\times2013\equiv8\times6\equiv3(\text{mod } 9)$ ，则剩下这四个数的和除以9也余3；

将27拆成四个数的乘积： $27=3\times3\times3\times1=3\times9\times1\times1=27\times1\times1\times1$ ，和分别为10,14,30，只有 $30\equiv3(\text{mod } 9)$ ，所以这个数的和为30。

8. 定义： $\Delta a = a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (2a-2) + (2a-1)$ ，例如： $\Delta 5 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9$ ，那么， $\Delta 1 + \Delta 2 + \Delta 3 + \cdots + \Delta 19 + \Delta 20$ 的计算结果是\_\_\_\_\_.

答案：4200 难度：★★★ 命题者：高思教育 苏霖

解析：将这些数填入下表中，第1行代表 $\Delta 1$ ，第2行代表 $\Delta 2$ ，依次类推，第20行代表 $\Delta 20$ ；

为方便观察，将此表顺时针旋转  $135^\circ$ ，如图 2，此时每行的平均数均为 20，表中共有  $1+2+\dots+20=210$  个数，所以和为  $210 \times 20 = 4200$ 。

1						
2	3					
3	4	5				
⋮	⋮	⋮				
18		.....	35			
19	20		.....	36	37	
20	21	22	.....	37	38	39

图 1

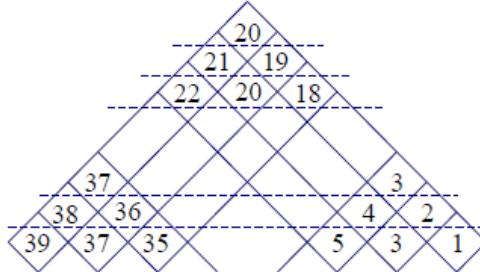


图 2

9. 将 1~16 填入  $4 \times 4$  的表格中，要求同一行右面的比左面的大；同一列下面的比上面的大。其中 4 和 13 已经填好，其余 14 个整数有 \_\_\_\_\_ 种不同的填法。

答案：1120 难度：★★★☆ 命题者：桦树湾教育 成俊峰

解析：左上角四个格和右下角四个格各有 2 种填法：

	4		
		13	

剩下左下角四个格和右上角四个格，还有 8 个数未填，此时可以从中任选 4 个数，填在其中四个格中，每 4 个数都有 2 种填法，所以共有  $2 \times 2 \times C_8^4 \times 2 \times 2 = 1120$  种填法。

最小	次小
次大	最大
最小	次大
次小	最大

10.  $n$  名海盗分金币。第 1 名海盗先拿 1 枚金币，再拿剩下金币的 1%；然后，第 2 名海盗先拿 2 枚，再拿剩下金币的 1%；第 3 名海盗先拿 3 枚，再拿剩下金币的 1%；……第  $n$  名海盗先拿  $n$  枚，再拿剩下金币的 1%。结果金币全被分完，且每位海盗拿的金币都一样多。那么共有金币 \_\_\_\_\_ 枚。

答案：9801 难度：★★★☆ 命题者：上海尚品教育 刘守军

解析：第  $n$  名海盗先拿  $n$  枚，再拿剩下金币的 1%，结果金币全被分完，说明剩下的金币为 0 枚，第  $n$  名海盗实际拿  $n$  枚；

第  $n-1$  名海盗先拿  $n-1$  枚，再拿剩下金币的 1%，由于每位海盗拿的金币一样多，所以剩下金币的 1% 是 1 枚，那么剩下金币的 99% 即  $n$  为 99 枚；

每个人都拿 99 枚，一共 99 人，所以共有  $99 \times 99 = 9801$  枚。

### 三. 填空题III（每小题 12 分，共 60 分）

11. 右图中，长方形 $ABCD$ 的面积是2013平方厘米。 $\triangle AOD$ 、 $\triangle BOC$ 、 $\triangle ABE$ 、 $\triangle BCF$ 、 $\triangle CDG$ 、 $\triangle ADH$ 都是等边三角形， $M$ 、 $N$ 、 $P$ 、 $Q$ 分别是 $\triangle ABE$ 、 $\triangle BCF$ 、 $\triangle CDG$ 、 $\triangle ADH$ 的中心。那么阴影部分的面积是\_\_\_\_\_平方厘米。

答案：2684 难度：**★★★☆**

命题者：学而思教育 赵璞铮

解析：如图，连接 $AM$ 、 $OM$ 、 $OQ$ ， $OQ$ 交 $AD$ 于点 $K$ ；

$\because Q$ 为等边三角形 $ADH$ 的中心， $\triangle AOD$ 与 $\triangle ADH$ 完全一样，

$$\therefore QK = \frac{1}{3}OK$$

$$\therefore OQ = \frac{4}{3}OK$$

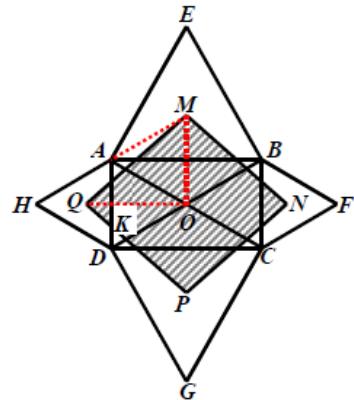
$\triangle OQM$ 的高为 $OQ$ ，底为 $OM$ ； $\triangle AOD$ 的高为 $OK$ ，底为 $AD$ ，

由于 $OM = AD$ ，

$$\therefore S_{\triangle OQM} = \frac{4}{3}S_{\triangle AOD}$$

$$\text{又}\because S_{\triangle OQM} = \frac{1}{4}S_{\text{阴影}} , S_{\triangle AOD} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = \frac{4}{3}S_{ABCD} = \frac{4}{3} \times 2013 = 2684 \text{ (平方厘米)}$$



下面简单证明 $OM = AD$ ：

$\because M$ 为等边三角形中心

$$\therefore \angle MAB = 30^\circ$$

$\because \triangle AOD$ 为等边三角形

$$\therefore \angle OAB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ, AO = AD$$

$$\therefore \angle MAO = 60^\circ$$

又 $\because \angle AOM = 60^\circ$

$\therefore \triangle AOM$ 是等边三角形

$$\therefore OM = AO = AD$$

12. 甲、乙两人分别从 $A$ 、 $B$ 两地同时出发，相向匀速而行；当甲、乙在途中 $C$ 地相遇时，丙从 $B$ 地出发，匀速去 $A$ 地；当甲与丙在 $D$ 地相遇时，甲立即调头且速度降为原来的80%；当甲、丙同时到 $A$ 地时，乙离 $A$ 地还有720米。如果 $CD$ 间的路程是900米，那么 $AB$ 间的路程是\_\_\_\_\_米。

答案：5265 难度：**★★★★** 命题者：《中小学数学教学》陈平

解析：甲速度降为原来的80%，与丙同时到 $A$ 地，则甲丙速度比为5:4，因此甲从 $C$ 到 $D$ 走900

$$\text{米，则丙从 } B \text{ 到 } D \text{ 走 } 900 \times \frac{4}{5} = 720 \text{ 米；}$$

甲从 $A$ 回到 $A$ 走了两个（全程-720米），同样时间内乙走了一个（全程-720米），甲走的第二个是用80%的速度走的，所以相当于用原速走了 $\frac{9}{4}$ 个（全程-720米），所以甲乙的速度比为9:4；

$$\text{甲乙相遇时乙从 } B \text{ 到 } C \text{ 走了 } 900 + 720 = 1620 \text{ 米，所以全程为 } 1620 \times \frac{4+9}{4} = 5265 \text{ 米。}$$

13. 有 16 名学生，他们坐成一个  $4 \times 4$  的方阵，某次考试中他们的得分互不相同，得分公布后，每位同学都将自己的成绩与相邻的同学（相邻指前、后、左、右，如坐在角上的同学只有 2 人与他相邻）进行比较，如果最多只有 1 名同学的成绩高于他，那么他会认为自己是“幸福的”。则最多有\_\_\_\_\_名同学会认为自己是“幸福的”。

答案: 12 难度: ★★★★☆ 命题者: 致德教育 王刚

解析: 每个  $2 \times 2$  的方格中最多有 3 个人“幸福”，所以 16 个人中，最多有  $16 \times \frac{3}{4} = 12$  个人“幸福”。

构造如下图，其中 16 到 5 号共 12 个人是“幸福”的。

14	4	5	6
15	16	1	7
13	2	3	8
12	11	10	9

14. 现有一个立方体  $ABCD-EFGH$ ，将其过  $B$  点的三个表面的正方形染成红色，现在剪开其中的若干条棱得到它的平面展开图，若展开图中三个红色正方形都没有公共边，那么共有\_\_\_\_\_种不同的剪法。（剪开的棱相同但剪的顺序不同的算作同一种剪法）

答案: 54 难度: ★★★★★ 命题者: 顺天府学 方非

解析: 将一个立方体延棱剪开得到平面展开图需要剪开 7 条棱。

因为剪开后，三个红色正方形没有公共边，那么需要把  $BA$ 、 $BF$ 、 $BC$  剪开。

下面对  $HD$ 、 $HE$ 、 $HG$  三条棱是否剪开进行分类：

- ①  $HD$ 、 $HE$ 、 $HG$  中剪开 1 条棱，有 3 种情况。

不妨设剪开  $HD$ 。还需剪开  $DA$ 、 $DC$ 、 $EA$ 、 $EF$ 、 $GH$ 、 $GC$  中的 3 条棱。

其中  $DA$ 、 $DC$  两条棱中选择一条剪开，有 2 种情况；

$EA$ 、 $EF$  两条棱中选择一条剪开，有 2 种情况；

$GH$ 、 $GC$  两条棱中选择一条剪开，有 2 种情况；

共有  $3 \times 2 \times 2 = 24$  种情况。

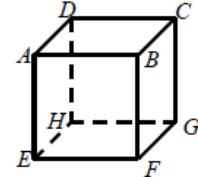
- ②  $HD$ 、 $HE$ 、 $HG$  中剪开 2 条棱，有 3 种情况。

不妨设剪开  $HE$ 、 $HG$ 。还需剪开  $DA$ 、 $DC$ 、 $EA$ 、 $EF$ 、 $GH$ 、 $GC$  中的 2 条棱。

$DA$ 、 $DC$  两条棱中选择一条剪开，有 2 种情况；

$EA$ 、 $EF$ 、 $GH$ 、 $GC$  四条棱中选择一条剪开，有 4 种情况；

共有  $3 \times 2 \times 4 = 24$  种情况。



③  $HD$ 、 $HE$ 、 $HG$  中剪开 3 条棱.

还需剪开  $DA$ 、 $DC$ 、 $EA$ 、 $EF$ 、 $GH$ 、 $GC$  中的 1 条棱，共有 6 种情况.

综上所述，共有  $24 + 24 + 6 = 54$  种不同的剪法.

15. 请参考《2013 年“数学解题能力展示”读者评选活动复试试题评选方法》作答.