

2015 年亚太初赛五年级 (A 卷)

时间: 90 分钟 总分: 150 分

1、规定运算“ \odot ”为 $a \odot b = a \times b - (a + b)$, 请计算: $6 \odot (5 \odot 4) =$ _____。

考点: 整数计算

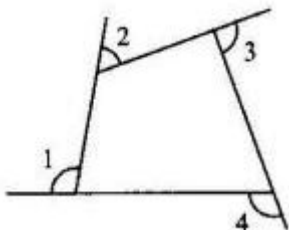
解析: $5 \odot 4 = 5 \times 4 - (5 + 4) = 11$ $6 \odot 11 = 6 \times 11 - (6 + 11) = 49$ 2、计算: $2015 - 7 \times 11 \times 13 \times 2 =$ _____。

考点: 整数计算

解析: $2015 - 7 \times 11 \times 13 \times 2 = 2015 - 1001 \times 2 = 2015 - 2002 = 13$

3、小红家的农场里, 养着一群鸡和兔, 这群鸡兔一共有 60 只眼睛, 96 只脚. 那么兔有_____只。

考点: 鸡兔同笼

解析: 鸡、兔总只数: $60 \div 2 = 30$ (只)假设全是鸡, 则兔有: $(96 - 30 \times 2) \div (4 - 2) = 18$ (只)4、如图所示, $\angle 1$ 等于 100 度, $\angle 2$ 等于 60 度, $\angle 3$ 等于 90 度。请问: $\angle 4$ 等于_____度。

考点: 角

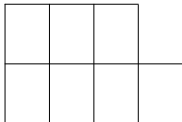
解析: 任意多边形的外角和等于 360° 。所以 $\angle 4 = 360^\circ - \angle 1 - \angle 2 - \angle 3 = 360^\circ - 100^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 110^\circ$ 。

5、一列长 280 米的火车以每秒钟 18 米的速度通过一座大桥, 从车尾上桥到车头离开桥共用了 20 秒, 那么这座桥长_____。

考点: 火车过桥

解析: 从车尾上桥到车头离开桥的距离 = 桥长 - 车长 = $20 \times 18 = 360$ (米)则桥长 = $360 + \text{车长} = 360 + 280 = 640$ (米)

6、右图中有_____个长方形。



考点: 图形计数

解析: 方法一: 分别以左上角的顶点开始, 依次找右下角的顶点个数:

 $6 + 4 + 2 + 4 + 3 + 2 + 1 = 22$ (个)

方法二：按小长方形的个数分类：

一个小长方形组成：7 个

两个小长方形组成：8 个

三个小长方形组成：3 个

四个小长方形组成：3 个

六个小长方形组成：1 个

所以共有 $7+8+3+3+1=22$ （个）

7、有一类数，它们既是 7 的倍数也是 5 的倍数，并且加上 9 是质数。这类数中最小的为_____。

考点：最小公倍数、质数

解析： $[7, 5] = 35$ ， $35 + 9 = 44(\times)$ ， $35 \times 2 + 9 = 79$ ，79 为质数，所以最小的为 70。

8、 $a = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ 则在 a 与 b 中，较大的数是_____。

考点：分数比较大

解析：这里用的作差法

$$a - b = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

$$\because \frac{1}{6} - \frac{1}{7} > 0, \frac{1}{4} - \frac{1}{5} > 0$$

$$\therefore a - b > 0$$

$$\therefore a > b$$

9、长江农场有一片牧场，草每天都在均匀地生长，如果在牧场上放养 24 头牛，那么 6 天就把草吃完了；如果只放养 21 头牛，那么 8 天才把草吃完，请问如果放养 36 头牛，_____天可以把草吃完。

考点：牛吃草问题

解析：设一头牛一天吃草 1 份

$$\text{则新草每天生长：} (21 \times 8 - 24 \times 6) \div (8 - 6) = 12$$

$$\text{原草量：} (21 - 12) \times 8 = 72$$

$$\text{所以，} 72 \div (36 - 12) = 3 \text{（天）}$$

PS：解决“牛吃草”问题的主要依据：①草的每天生长量不变；②每头牛每天的食草量不变；③草的总量=草场原有的草量+新生的草量，其中草场原有的草量是一个固定值，新生的草量=每天生长量×天数。

同一片牧场中的“牛吃草”问题，一般的解法可归纳为：

(1) 设定 1 头牛 1 天吃草量为“1”

(2) 草的生长速度 = (对应牛的头数 × 较多天数 - 对应牛的头数 × 较少天数) ÷ (较多天数 - 较少天数)；

(3)原来的草量=对应牛的头数 \times 吃的天数-草的生长速度 \times 吃的天数;

(4)吃的天数=原来的草量 \div (牛的头数-草的生长速度)

(5)牛的头数=原来的草量 \div 吃的天数+草的生长速度。

“牛吃草”问题有很多的变例,像抽水问题、检票口检票问题等等,只有理解了“牛吃草”问题的本质和解题思路,才能以不变应万变,轻松解决此类问题。

10、把四个数 8、8、8、10,用四则运算组成一个算式_____,使它的结果等于 24(可添加括号)

考点: 24 点

解析: $(10-8)\times 8+8=24$

11、A, B, C 为 3 个小于 20 的质数, $A+B+C=30$, 求这三个质数_____。

考点: 质数合数

解析: 因为 $A+B+C=30$ 为偶数, 所以 A, B, C 必为两奇一偶或三偶, 因为 A, B, C 为小于 30 的质数, 而 2 是唯一的偶质数, 所以必为两奇一偶, 所以必有一个 2, 另外两个为 11, 17。

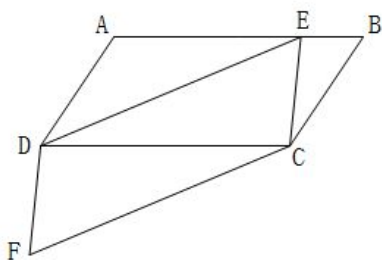
12、东西镇相距 45 千米, 甲、乙二人分别从两镇同时出发相向而行, 甲比乙每小时多行 1 千米, 5 小时后两人相遇, 则甲每小时行_____千米。

考点: 相遇问题

解析: 相遇时乙走了 $(45-5\times 1)\div 2=20(km)$, 则甲行了 $45-20=25(km)$

所以甲的速度为 $25\div 5=5(km/h)$

13、如图所示, 已知三角形 $S_{\triangle BEC}$ 的面积为 30 平方厘米, E 是 AB 边上靠近 B 点的四等分点, 平行四边形 DECF 的面积是_____平方厘米。



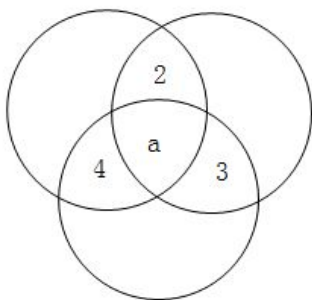
考点: 平面图形面积(一半模型、等积变形)

解析: 个人认为本题缺少条件不能做, 因为题目并没有告诉我们四边形 ABCD 是什么图形, 如果从图形上看, 我只能看成平行四边形。下面的解法是把四边形 ABCD 看成平行四边形来求解。

由图形可知三角形 DCE 面积是平行四边形 ABCD 面积的一半, 也是平行四边形 DECF 面积的一半。即平行四边形 DECF 面积等于平行四边形 ABCD 面积。又因为 E 是 AB 的四等分点, 所以

$S_{\triangle AED} : S_{\triangle BEC} = AE : EB = 3 : 1$, $S_{\triangle AED} = 30 \times 4 = 120(cm^2)$, 平行四边形 ABCD 的面积为 $120 \times 2 = 240$ (平方厘米), 那么平行四边形 DECF 的面积也就是 240 平方厘米。

14、将 1~7 分别填入下图的空白处（部分数已填出），使每个圆上填的四个数之和为 13。图中 a 处填的数是_____



考点：容斥原理

解析：由题意可得 1~7 每个数字只能用一次，其和为 $1+2+3+4+5+6+7=28$ ，又因每个圆上填的四个数之和为 13，所以根据容斥原理可得： $13 \times 3 - (2+a+4+a+3+a) + a = 28$ ，整理并解得： $a=1$

15、从一副完整的扑克牌中至少抽出_____张牌才能保证至少 6 张牌的花色相同。

考点：抽屉原理、最不利原则

解析：一副完整的扑克牌只有 54 张，其中大小王两张还有四种花色各有 13 张，根据最不利原则：先取两张大小王，之后每个花色再各取 5 张，这时在任意取出一张，必会出现 6 张牌的花色相同。所以至少取了 $2+5 \times 4+1=23$ （张）

16、已知 $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$ ，则 A 的整数部分是_____

考点：分数计算（两边夹定理）

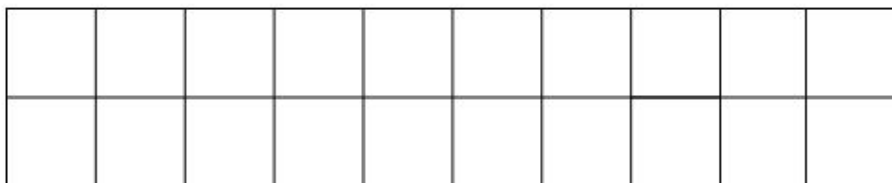
解析：分母成倍数关系的可以先加在一起。

$$\text{即：} A = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) = \frac{11}{18} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right),$$

$$\text{依据两边夹定理得：} \frac{11}{18} + \frac{1}{8} \times 4 < A < \frac{11}{18} + \frac{1}{4} \times 4$$

$$\text{即：} 1 < \frac{11}{18} + \frac{1}{2} < A < 1\frac{11}{18}, \text{ 所以 } A \text{ 的整数部分是 } 1.$$

17、用 1×2 的方格把下 2×10 的方格图覆盖，那么有_____种不同的覆盖方法。



考点：递推计数

解析：本题与走楼梯是一样的，要么走一步，要么走两步，一共十级台阶

如果只有第一列：1 种

只有前两列： $1+1=2$ （种）

只有前三列： $2+1=3$ （种）

只有前四列： $3+2=5$ （种）

根据上述规律，之后依次是 8、13、21、34、55、89，所以前十列有 89 种。

刚考完的小机灵杯四年级也用到走楼梯的方法，那就补充一题：

例：校教学楼梯有 6 级，规定一步只能上一级或两级，从最底下上到上面共有多少种不同的上法？

解： 

A 代表底楼，一小段代表一级楼梯。

楼梯	A	C	D	E	F	G	B
种法	1	1	2	3	5	8	13

A 点算一种，A 到 C 只能走一步，所以 C 点只有一种。

A 到 D 有 2 级， $2=1+1$ 或 $2=2$ （1 级 1 级走，或者直接走 2 级），所以 D 点有 2 种走法。

A 到 E：到 E 的最后一步就两种情况，走 1 级或者走 2 级。

如果 A 到 E 的最后一步是走 1 级，所以倒数第 2 步走到 D，到 D 有 2 种；

如果 A 到 E 的最后一步是走 2 级，所以倒数第 2 步走到 C，到 C 有 1 种；

所以 A 到 E 有 $2+1=3$ 种。

同理每次走到一个点，刚好是它前面两个点的种数的和，所以也就是 13 种。

这刚好也是斐波那契数列。

18、将一根长 144 厘米的铁丝，做成长和宽都是整数厘米的长方形，共有_____种不同的做法。

考点：周长问题

解析：因为长方形的周长为 144 厘米，所以长宽之和为 $144 \div 2 = 72$ （厘米），又因为长方形的长和宽都是整数厘米， $72 = 71 + 1 = 70 + 2 = 69 + 3 = 68 + 4 \cdots \cdots = 37 + 35 = 36 + 36$ ，所以共有 $71 - 36 + 1 = 36$ （种）

19、从 1~2015 这 2015 个自然数中，最多能找出_____个数，使得这个数乘以 240 所得的乘积是一个完全平方数。

考点：完全平方数、质因数分解

解析： $240 = 2^4 \times 3 \times 5$ ，则所选出的数中分解质因数后其中至少有一个 3 和 5，即这个数是 15 的倍数。 $2015 \div 15 = 134 \cdots \cdots 5$ ，所以 15 的 $1^2 \sim 11^2$ 倍都可以，即这样的数共有 11 个。

20、计算： $1101_{(2)} \times 101_{(2)} = \underline{\hspace{2cm}}_{(2)}$ 。

考点：进位制

解析：二进制：满 2 进 1。乘法遵循十进制的乘法法则

$$\begin{array}{r}
 1101 \\
 \times 101 \\
 \hline
 1101 \\
 11010 \\
 \hline
 1000001
 \end{array}$$

$$(1101)_2 \times (101)_2 = (1000001)_2$$

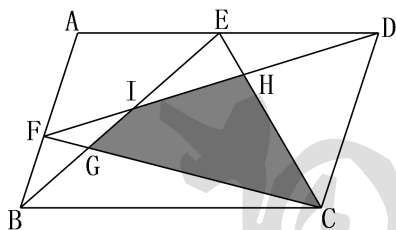
21、一个三位数是 6 的整数倍，且个位数字与百位数字之和是十位数字的 2 倍，这样的三位数共有 个。

考点：位值原理

解析：设这个三位数为 \overline{abc} ，因为 \overline{abc} 是 6 的倍数，所以 c 为偶数，又因为 $a+c=2b$ ，所以 a 也是偶数。数字和 $a+b+c=3b$ ，一定是 3 的倍数，所以只要满足 a 和 c 都为偶数即可， a 的可能取值为 2、4、6、8， c 的可能取值为 0、2、4、6、8，由加乘原理得： $4 \times 5 = 20$ （个）

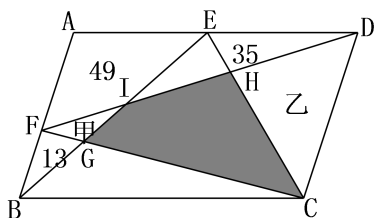
22、在平行四边形 ABCD 中，E，F 分别在 AD，AB 上，已知 $S_{AFIE} = 49$ ， $S_{\triangle BGF} = 13$ ， $S_{\triangle DEH} = 35$ ，

求 $S_{GCHI} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



考点：一半模型

解析：如下图所示：



根据一半模型得： $49 + 13 + 35 + \text{甲} + \text{乙} = \text{甲} + \text{乙} + \text{阴影}$
 所以阴影部分的面积为： $49 + 13 + 35 = 97$

23、算式： $1^{2015} + 2^{2015} + 3^{2015} + \cdots + 2013^{2015} + 2014^{2015}$ ，计算结果的个位数是_____。

考点：周期问题

解析：每一项的个位数字都是以 4 个为一个周期（这里以 4 为周期是为了让每个数的规律相同，其实 4ⁿ 的规律为 4、6、4、6。。。，虽然是 4、6 重复，但是也可以看作 4、6、4、6 重复，总之都可以看作 4 个一周期，可以当结论记住。），因为 $2015 \div 4 = 503 \cdots 3$ ，所以原式计算结果的个位数字与 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 2013^3 + 2014^3$ 的计算结果的个位数字相同，根据公式得：

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 2013^3 + 2014^3 = \left[\frac{2014 \times 2015}{2} \right]^2$ ，此结果为 10 的倍数，所以原式的计算结果个位数字为 5。

补充： $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

24、“鲁别克”是二战时期著名的坦克大战的战场，据统计共 115 辆坦克，德军坦克数量比盟军的 2 倍多 2 辆，而盟军的坦克数量比三连的 3 倍多 1 辆。请问：德军比三连多_____辆坦克。

考点：和倍问题、列方程解应用题

解析：题目没太说清楚三连是什么，只能把“德国”、“盟军”、“三连”当作 3 人处理。

设三连有坦克 x 辆，则盟军的坦克数为 $(3x+1)$ 辆，德军的坦克数为 $[2(3x+1)+2]$ 辆。

$[2(3x+1)+2] + (3x+1) + x = 115$ ，解得 $x = 11$ ，

德军坦克数为： $2 \times (3 \times 11 + 1) + 2 = 70$ （辆），

所以德军比三连多： $70 - 11 = 59$ （辆）。

25. 已知 3 个互不相同的自然数之和为 55，其中每两个数之和是完全平方数，那么这三个自然数分别是_____。

考点：数论

解析：设这三个数分别为 a 、 b 、 c ，则 $a + b + c = 55$ ，

所以 $a + b + b + c + a + c = 2(a + b + c) = 110$ ，且 $110 = 25 + 36 + 49$ ，

所以 a 、 b 、 c 分别为 $55 - 25 = 30$ ， $55 - 36 = 19$ ， $55 - 49 = 6$ 。

26、请问至少出现一个数码 3，并且是 3 的倍数的五位数共有_____个。

考点：乘法原理、数的整除

解析：

排除法：首先确定是 3 的倍数的五位数共有 $90000 \div 3 = 30000$ （个）；

再确定不含数码 3 且是 3 的倍数的五位数：其中万位有 8 种选择（1 到 9 中，0 和 3 不选），千位、百位、十位各有 9 种选择（1 到 9 中，3 不选），因为要使五位数是 3 的倍数，当前 4 位确定是，如果前 4 位的数字和除以 3 余 0，则个位可以取 0、6、9；同理，如果前 4 位的数字和除以 3 余 1，则个位可以取 2、5、8；如果前 4 位的数字和除以 3 余 2，则个位可以取 1、4、7；所以个位相应的只有 3 种选择，所以共有 $8 \times 9 \times 9 \times 9 \times 3 = 17496$ （种）；

所以最后符合条件的五位数共有： $30000 - 17496 = 12504$ （种）。

27、甲、乙二人以均匀的速度分别从 A、B 两地同时出发，相向而行，他们第一次相遇地点离 A 地 8 千米，相遇后二人继续前进，走到对方出发点后立即返回，在距 A 地 6 千米处第二次相遇，则 A、B 两地的距离是_____千米。

考点：两人两次相遇

解析：第一次相遇时，两个人共走了一个全程 AB，甲走了 8 千米（因为甲从 A 出发，他们第一次相遇地点离 A 地 8 千米）；第二次相遇时，从出发到第二次相遇两个人共走了三个全程 AB，甲走了 $8 \times 3 = 24$ 千米，甲走的 24 千米再加上 6 千米即两个全程 AB，

所以 AB 两地的距离为 $(8 \times 3 + 6) \div 2 = 15$ （千米）

28、10 只无差别的橘子放到 3 个不同的盘子里，允许有的盘子空着。请问一共有_____种不同的放法。

考点：排列组合、插板法

解析：我们知道，插板法在分组的时候要求每组至少一个元素，而这里的却可以取 0，因此不满足插板法，需要变一下形。

设 3 个不同的盘子放的橘子分别为 a 个、b 个、c 个，则有 $a + b + c = 10$ （这里的 a、b、c 可以取 0）

为了满足插板法的要求，每组至少一个元素，变形为 $(a+1) + (b+1) + (c+1) = 13$

那么此题就变成了“13 只无差别的橘子放到 3 个不同的盘子里，每个盘子至少放 1 个。请问一共有_____种不同的放法。”

所以 $C_{13-1}^{3-1} = C_{12}^2 = 66$ （个）

补充：插板法

精要：所谓插板法，指在解决若干相同元素分组，要求每组至少一个元素时，采用将比所需分组数目少 1 的板插入元素之间形成分组的解题策略。

提醒：其首要特点是元素相同，其次是每组至少含有一个元素，一般用于组合问题。

29、2025 的百位数字为 0，去掉 0 后是 225（仅去掉百位上的 0）， $225 \times 9 = 2025$ ，这样的 4 位数称为“零巧数”。那么请罗列出所有的“零巧数”有_____

考点：位值原理、不定方程

解：零不能在首位。所以最多只能在个位、十位、百位。

（1）当 0 在个位时，原数是去掉 0 之后的新数的 10 倍，所以不可能在个位。

（2）当 0 在十位时，此时有 $\overline{ab0c} = \overline{abc} \times 9$

化简 $\overline{ab} \times 100 + c = \overline{ab} \times 90 + 9c$ ，得 $\overline{ab} \times 5 = 4c$

所以 $5|c$ ，c 不能取 0（个位不可能是 0），

所以 $c = 5$ ，当 $c = 5$ 时， $\overline{ab} = 4$ （不成立， \overline{ab} 为两位数）

(3) 当 0 在十位时, 此时有 $\overline{a0bc} = \overline{abc} \times 9$

$$1000a + \overline{bc} = 900a + \overline{bc} \times 9 \quad \text{化简得 } 25a = \overline{bc} \times 2$$

所以 $25 \mid \overline{bc}$, 所以 \overline{bc} 的可能取值为 25、50、75, 对应的 a 分别为 2、4、6

所以所有的“零巧数”有 2025、4050、6075.

30、A, B 两地之间有个隧道, 一辆轿车于 08 时 16 分从 B 开向 A, 一辆卡车于 09 时从 A 开向 B. 已知卡车与轿车同时抵达隧道的两端, 但卡车比轿车晚 2 分钟离开隧道. 若轿车 10 时 56 分到达 A, 卡车 12 时 20 分到达 B, 则他们同时抵达隧道两端的时刻是_____

考点: 比例行程

解析: 卡车走完全程 200 分钟, 轿车走完全程 160 分钟, 行完全程 AB 卡车与轿车时间比 5:4, 由于两车都经过隧道 (路程相等), 所以通过隧道的的时间比是 5:4. 由于通过隧道卡车比轿车多用 2 分钟, 而通过隧道卡车的时间比轿车的时间多 1 份, 所以 1 份是 2 分钟, 所以通过隧道卡车用 10 分钟, 轿车用 8 分钟.



如图所示, CD 段表示隧道. 设卡车从 A 到 C 所用的时间为 x 分钟, 由于轿车比卡车早出发 44 分钟, 且卡车、轿车同时分别到达 C、D, 所以轿车从 B 到 D 所用的时间为 $x + 44$, 那么卡车行 BD 段所用的时间为 $\frac{5}{4}(x + 44)$,

$$\text{由题意得 } x + 10 + \frac{5}{4}(x + 44) = 200, \text{ 解得 } x = 60$$

卡车 9 点从 A 出发, 经过 60 分钟到达 C 点, 所以他们同时抵达隧道两端的时刻是 10 点

上海尚品教育教研团队

李祖彬、尹芳媛、朱加强、刘莉、闵令超、朱礼春、王洪福老师整理, 以上分析仅代表老师的个人观点, 不代表官方标准答案。