

2015 数学花园探秘模拟测试（五年级）

姓名：_____ 得分：_____

一、填空题（每题 8 分，共 32 分）

1. 请计算： $2015 \times 122 \div 793 =$ _____.

【考点】计算，整数巧算

【难度】☆

【答案】310

【分析】原式 $= 2015 \times 2 \times 61 \div 61 \div 13 = 4030 \div 13 = 310$

2. 刚刚过去的 APEC 假期是 11 月 7 日（星期五）至 11 月 12 日（星期三），这几日北京市小客车采取单日单号行驶、双号限行，双日双号行驶、单号限行措施。其余时间中，北京市采取周一尾号 3、8 限行，周二尾号 4、9 限行，周三尾号 5、0 限行，周四尾号 1、6 限行，周五尾号 2、7 限行，周六周日所有车不限行措施。那么，11 月尾号是 0 的北京汽车，共限行_____天。

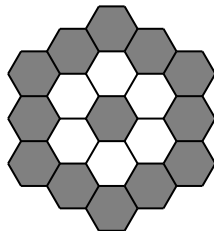
【考点】计数，枚举法

【难度】☆

【答案】6

【分析】本月除 APEC 周的所有周三限行：5、19、26 日；APEC 周的单日限行：7、9、11 日。共限行 6 天。

3. 如图是一个用火柴棒摆成的由若干个正六边形组成的图形，若要求除去中心六边形外，由里到外摆 4 圈（在下图的基础上再加两圈），那么一共需要_____根火柴棒。

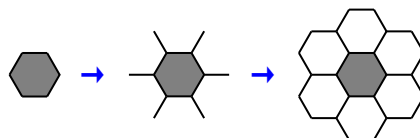


【考点】计数，几何计数

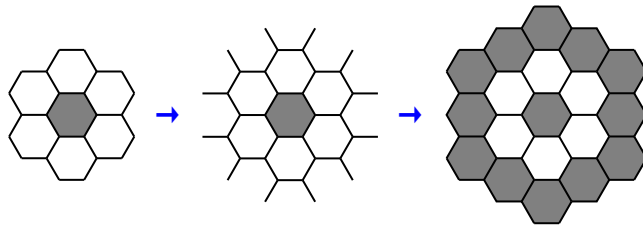
【难度】☆☆☆

【答案】210

【分析】方法一（递推）： $f(0) = 6$ ，加一层，先是每个凸点向外伸出一根线，再将外端点连接起来（如图）， $f(1) = f(0) + 1 \times 6 + 3 \times 6 = 30$ 。



类似地，再加第二层， $f(2) = f(1) + 2 \times 6 + 5 \times 6 = 72$ 。



进而 $f(3) = f(2) + 3 \times 6 + 7 \times 6 = 132$, $f(4) = f(3) + 4 \times 6 + 9 \times 6 = 210$. ($f(n) = f(n-1) + 6(3n+1)$, n 是正整数)

方法二 (算两次): 加四层时, 共有 $1+6+12+18+24=61$ 个六边形, 即共有 $61 \times 6 = 366$ 条边, 其中除去外围的 $6 \times 9 = 54$ 条边之外, 其他的边在拼接时少了一半 (两边相接合变为一条线段), 故共有 $(366 + 54) \div 2 = 210$ 条线段.

4. 一个五位数, 将它的各位数字顺序颠倒就可以得到一个新的五位数, 而且这个新的五位数恰好是这个原数的 4 倍, 那么, 原来的五位数是_____.

【考点】数论, 数字谜

【难度】☆☆☆

【答案】21978

【分析】设此数为 \overline{abcde} , 则 $\overline{abcde} \times 4 = \overline{edcba}$. $e \times 4$ 的个位是 a , 且 $a < 3$, 故 $a = 2$, $e = 8$. 进而千位 $b \times 4$ 加进位点得 d , 无进位, 同时十位 $d \times 4 + 3$ 的个位得 b , 可知 b 是奇数, 且小于 3, 故 $b = 1$, $d \geq 4$ 且 $d \times 4 + 3$ 的个位是 1, 得 $d = 7$. 最后百位 $c \times 4 + 3 = \overline{3c}$, 得 $c = 9$. 如下式:

$$\begin{array}{r} 2 \quad b \quad c \quad d \quad 8 \\ \times \quad \quad \quad \quad \quad 4 \\ \hline 8 \quad d \quad c \quad b \quad 2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 2 \quad 1 \quad c \quad 7 \quad 8 \\ \times \quad \quad \quad \quad \quad 4 \\ \hline 8 \quad 7 \quad c \quad 1 \quad 2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 2 \quad 1 \quad 9 \quad 7 \quad 8 \\ \times \quad \quad \quad \quad \quad 4 \\ \hline 8 \quad 7 \quad 9 \quad 1 \quad 2 \end{array}$$

故原五位数是 21978.

二、填空题 (每题 10 分, 共 40 分)

5. 将自然数 1, 2, 3, …, 10000 列成如图的 100×100 的正方形数表:

1	2	...	100
101	102	...	200
201	202	...	300
...
9901	9902	...	10000

从表中任意选定一个数, 随后删掉该数所在的行和列, 再对剩下的 99×99 的正方形数表进行同样的处理, 如此下去, 工作了 100 次后, 被选中的 100 个数的和的数字和是_____.

【考点】计算, 数列与数表

【难度】☆☆☆

【答案】10

【分析】同列的数末两位相同, 不同列的末两位一定不同, 而工作 100 次所选出的 100 个数必定互不同列, 故其末两位之和为 $0+1+2+\dots+99=4950$. 类似地, 不同行的百位千位一定不同 (除非选最后一个数, 其百位千位所组成的数是本行其它百位千位所组成数加 1), 100 个数必定互不同行, 故其百位千位所组成数之和为 $0+1+2+\dots+99+1=4951$, 故和必为 $4950+4951 \times 100 = 500050$. 数字和为 10.

6. 有 4 个房间里共有 201 台电脑，如果同一房间的电脑没有电缆连接，不同房间的电脑每两台都有一条电缆连接，那么最多需要_____条电缆。

【考点】数论，数论中的最值

【难度】☆☆☆

【答案】15150

【分析】本题翻译成数学语言就是：4 个自然数 a 、 b 、 c 、 d ，满足 $a+b+c+d=201$ ，求

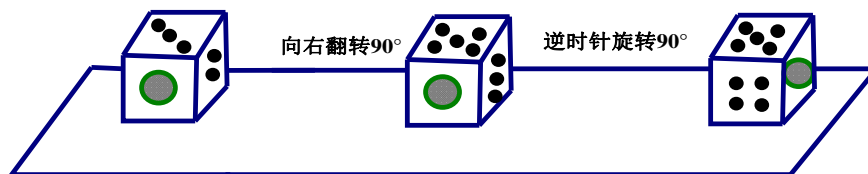
$ab+ac+ad+bc+bd+cd$ 的最大值。

考虑“差小积大”思想，下证任两数差不超过 2 为宜：假设 $b \geq a+2$ ，则将 a 、 b 换为 $a+1$ 、 $b-1$ 后，新的乘积是：

$$\begin{aligned} & (a+1)(b-1) + (a+1)c + (a+1)d + (b-1)c + (b-1)d + cd \\ &= ab + b - a - 1 + ac + c + ad + d + bc - c + bd - d + cd \\ &= (ab + ac + ad + bc + bd + cd) + (b - a - 1 + c + d - c - d) \\ &= (ab + ac + ad + bc + bd + cd) + (b - a - 1) \\ &> ab + ac + ad + bc + bd + cd \end{aligned}$$

可见电线最多的方法，必然 4 个房间的电脑数非常均等，差不超过 2，即 50、50、50、51。电线数为 $50^2 \times 3 + 50 \times 51 \times 3 = 15150$ 。

7. 将正方体骰子（相对面上的点数分别为 1 和 6、2 和 5、3 和 4）放置于水平桌面上，如图。将骰子向右翻滚 90° ，然后在桌面上按逆时针方向旋转 90° ，则完成一次变换。若骰子的初始位置为图中最左边所示的状态，那么按上述规则连续完成 5 次变换后，骰子朝上一面的点数是_____。



【考点】立体几何，空间想象

【难度】☆☆☆

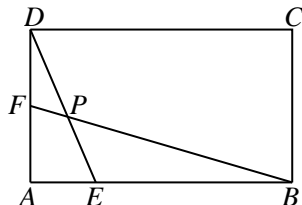
【答案】6

【分析】我们称初始状态为 (1、2、3)，则一次变换后变为 (4、1、5)，变换过程为：

$$(1、2、3) \rightarrow (4、1、5) \rightarrow (2、4、6) \rightarrow (1、2、3) \rightarrow \dots$$

可见每 3 次变换为一个周期，那么 5 次变换后的状态应为 (2、4、6)，即最上面的数是 6。

8. 在长方形 $ABCD$ 中， $AB=24$ ， $AD=14$ ，点 E 、 F 在 AB 、 AD 上， $AE=\frac{1}{3}BE$ ， $AF=DF$ ， DE 与 BF 交于 P 点，那么， $AEPF$ 面积是_____。



【考点】几何，比例模型（燕尾）

【难度】☆☆☆

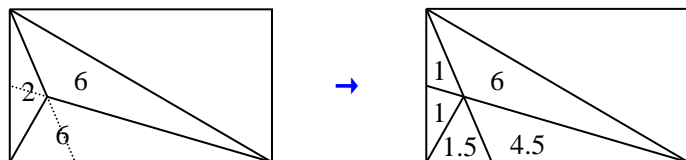
【答案】30

【分析】如下图，连接 AP、BD，设三角形 APD 的面积是 2 份，则由燕尾模型， $\frac{S_{\triangle APD}}{S_{\triangle BPD}} = \frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ ，故

$S_{\triangle BPD} = 2 \times 3 = 6$ 份。同理 $\frac{S_{\triangle BPD}}{S_{\triangle BPA}} = \frac{DF}{FA} = \frac{1}{1}$ ，故 $S_{\triangle BPA} = S_{\triangle BPD} = 6$ 份，长方形的总面积为

$(2+6+6) \times 2 = 28$ 份。进而 $S_{\triangle APF} = 2 \times \frac{1}{1+1} = 1$ 份， $S_{\triangle APE} = 6 \times \frac{1}{1+3} = 1.5$ 份，所求面积为 $1+1.5 = 2.5$

份。故答案为 $24 \times 14 \times \frac{2.5}{28} = 30$ 。



三、填空题（每题 12 分，共 48 分）

9. 对于一个自然数 k ，如果能找到非零自然数 m 和 n ，使得 $k = m + n + m \times n$ （ m 、 n 可以相同），则称 k 为一个“好数”。例如 $3 = 1 + 1 + 1 \times 1$ ，所以 3 就是一个好数。在 1, 2, 3, …, 15 这 15 个自然数中，好数有_____个。

【考点】数论，整数分拆

【难度】☆☆☆

【答案】9

【分析】方法一（枚举）：明显最小的好数是 3。大于等于 3 的数中，奇数必为好数，原因是

$2n+1 = 1 + n + 1 \times n$ 。故下面研究 4、6、8、10、12、14 是否为好数：若一个偶数为好数，则组成它的 m 、 n 必然都是偶数，即此数至少为 $2+2+2 \times 2 = 8$ ，次小的数为 $2+4+2 \times 4 = 14$ ，即 15 以内的偶数中，只有 8 和 14 是好数。故知符合要求的好数为 3、5、7、8、9、11、13、14、15，共 9 个。

方法二（多项式变形）： $k+1 = mn + m + n + 1 = (m+1)(n+1)$ ，故知只要 $k+1$ 是合数即可，符合要求的 k 有 3、5、7、8、9、11、13、14、15，共 9 个。

10. 甲、乙两车分别从 A、B 两地同时相向开出，4 小时后两车相遇，然后各自继续行驶 3 小时，此时甲车距 B 地 10 千米，乙车距 A 地 80 千米。那么，当甲车到达 B 地时，乙车还要经过_____分钟才能到达 A 地。

【考点】行程，方程解行程

【难度】☆☆☆☆

【答案】120

【分析】设甲、乙速度分别为 a 千米每时、 b 千米每时，则有方程组：
$$\begin{cases} 7a+10=7b+80 \\ \frac{a}{b}=\frac{3b+80}{3a+10} \end{cases}$$
，上式化简为

$a = b + 10$ ，带入下式得： $\frac{b+10}{b} = \frac{3b+80}{3b+40}$ ，等式左右两边同时减去 1，得 $\frac{10}{b} = \frac{40}{3b+40}$ ，故

$3b+40 = 4b$ ， $b = 40$ ， $a = 50$ 。

甲开到终点，还需 $10 \div 50 = 0.2$ 小时 = 12 分钟；乙开到终点，还需 $80 \div 40 = 2$ 小时 = 120 分钟。故

答案为 $120 - 12 = 108$ 分钟.

11. 海淀区的一些小学生参加一次数学竞赛, 且这次竞赛共 6 道试题, 已知每道题恰有 500 名学生答对, 但任意两名学生中, 至少有一道试题使两个学生都没有答对. 那么, 海淀区至少有_____名学生参加了这次数学竞赛.

【考点】组合, 构造与论证

【难度】☆☆☆☆

【答案】1000

【分析】由于一共答对了 3000 题, 想要人数少, 那么每人答对的题就必须尽量多

首先, 每人答对 3 题是可行的, 构造 4 人一组, 每组中的同学分别答对第 123、145、246、356 题, 共 250 组即可, 此时需 1000 名同学

接下来证明如果有答对多于 3 题的同学, 总人数一定超过 1000 名:

由于任两人都有同一题答错, 那么不可能有全对的同学;

同样的, 也不会有只错一题的同学, 否则其他同学必须都错这一题才能和他有同一题答错, 就不能满足每道题都有 500 人答对;

如果有一个同学只错了 AB 两题, 那么不会有任何一名同学同时答对 AB 两题, 则至少要有 500 名同学答对 A 题, 500 名同学答对 B 题, 总人数必然大于 1000

12. 请参考《2015 年“数学花园探秘”初试试题评选方法》作答.