

第5届启智杯数学思维及应用能力竞赛(小学组)

参考答案与评分标准

1. 观察如下几个等式:

$$(1) \frac{3}{1} = 3; (2) \frac{5+7}{1+3} = 3; (3) \frac{7+9+11}{1+3+5} = 3; \dots\dots$$

你发现了什么规律? 请据此写出第 100 个式子。

解: 第 n 个式子的分母是前 n 个连续奇数之和, 分子是第 $n+1$ 至第 $2n$ 个连续奇数之和, 其等号右端都是 3。

-----6 分

第 100 个式子为

$$\frac{201+203+\dots+399}{1+3+\dots+199} = 3 \quad \text{-----} \quad +4 = 10 \text{ 分}$$

2. 有一个 2014 位数, 其从左到右第 2、3 位数字分别为 2、3, 第 11、30、2014 位数字分别为 4、5、6. 如果其任何相邻的五位数字之和全相等, 请问该数的第一位数字是几? 全部 2014 位数字之和是多少? 写出结果, 并说明分析过程。

解:

答案 (4 分): 第一位数字是 4; 全部 2014 位数字之和是 8055. -----4 分

分析过程 (6 分): 由于其任何相邻的五位数字之和全相等, 所以其中任何连续六位数 \overline{abcdef} , 总有 $a+b+c+d+e = b+c+d+e+f$, 因此 $a=f$, 这说明, 这 2014 位数每五位一循环。 ----- +2 = 6 分

由于 11、30、2014 被 5 除余数分别为 1、0、4, 所以该数的第一位数字是 4 (前五位分别是 4、2、3、6、5) ----- +2 = 8 分

由于 $2014 \div 5 = 402 \text{L} 4$, 所以这整个数为

$$(4+2+3+6+5) \times 402 + (4+2+3+6) = 20 \times 402 + 15 = 8040 + 15 = 8055$$

----- +2 = 10 分

3. 一个非零自然数，如果从左到右顺读和从右到左逆读，都是一样的，则这个数称为“对称数”，如 **4, 55, 171, 4994, 12321** 等都是对称数，而 **332** 不是对称数。那么全部非零自然数（从 1 开始）从小到大的第 **2014** 个对称数是多少？写出结果，并说明分析的过程。

【参考答案】

一位对称数：有 9 个(1~9)；————— 1 分

两位对称数：有 9 个(11, 22, 33, …, 99)；————— + 1 = 2 分

三位对称数： $9 \times 10 = 90$ 个(1□1, 2□2, …, 9□9)；————— + 1 = 3 分

四位对称数： $9 \times 10 = 90$ 个(1□□1, 2□□2, …, 9□□9)；————— + 1 = 4 分

五位对称数： $9 \times 10 \times 10 = 900$ 个(1□□□1, 2□□□2, …, 9□□□9)；————— + 1 = 5 分

六位对称数： $9 \times 10 \times 10 = 900$ 个(1□□□□1, 2□□□□2, …, 9□□□□9).共有： $9 \times 2 + 90 \times 2 + 900 \times 2 = 1998$ 个。————— + 1 = 6 分

七位对称数：前 10 个为 1000001, 1001001, 1002001, …, 1009001；————— + 1 = 7 分

接下来的是 1010101, 1011101, 1012101, 1013101, 1014101, 1015101, …
————— + 1 = 8 分

所以，第 2014 个对称数为 1015101。————— + 2 = 10 分

4. 把一张纸片裁剪成 8 份，称第 1 次操作；取其中一张再把它裁剪成 8 份，称第 2 次操作；如此继续下去，……，能否经过若干次操作正好剪出 **2014** 张纸片？若不能，请说明理由；若能，则需要经过多少次操作？写出结果，并说明分析的过程。

解答：用 a_n 表示第 n 次操作后得到的纸片数。则

$$a_1 = 8, \quad a_2 = (8-1) + 8 = 7 + 8, \quad a_3 = (8-1) + (8-1) + 8 = 7 \times 2 + 8, \quad \dots, \quad$$

$$a_n = 7(n-1) + 8 = 7n + 1. \quad \text{————— 5 分}$$

若能剪出 2014 张纸片，则 $7n + 1 = 2014$ ，解得： $n = 287\frac{4}{7}$ 不是整数，故不能经过若干次操作正好剪出 **2014** 张纸片。————— + 5 = 10 分

5. 有如下三组数:

A 组: $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}$;

B 组: 1, 3, 5, 7, 9;

C 组: 0.7, 1.4, 2.1, 2.8, 3.5, 4.2, 4.9。

从每一组中各取一个数, 相乘得到一个乘积, 求这 140 个乘积的总和是多少? 写出过程和结果。

【参考答案】

解答: 这 140 个乘积的总和 =

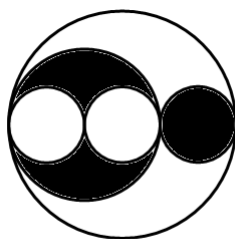
$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}\right) \times (1+3+5+7+9) \times (0.7+1.4+2.1+2.8+3.5+4.2+4.9) \quad \text{——} \quad 4 \text{ 分}$$

$$= \left(\frac{2}{2 \times 3} + \frac{2}{3 \times 4} + \frac{2}{4 \times 5} + \frac{2}{5 \times 6}\right) \times 25 \times \frac{7(0.7+4.9)}{2} \quad \text{—————} + 2 = 6 \text{ 分}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \times 25 \times 7 \times 5.6 \quad \text{—————} + 2 = 8 \text{ 分}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) \times 980 = \frac{980}{3} = 326\frac{2}{3}。 \quad \text{—————} + 2 = 10 \text{ 分}$$

6. 如图所示, 五个圆中有部分的圆彼此相切 (两个圆有且只有一个公共点称两个圆相切), 且总共只有三种不同长度的直径。若图中阴影部分的面积和为 7 cm^2 , 求最大圆内空白处的总面积。



第 6 题图

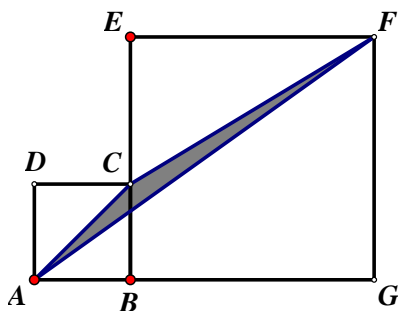
【参考答案】

解: 由图可知: 这三种长度的不同的直径从小圆到大圆的长度比为 **1:2:3**. ————2 分
即由小圆到大圆的面积之比为 **1:4:9**. 设最小的圆的面积为 s , 则另外 2 个圆的面积从小到大依次为 $4s$, $9s$. ———— + 2 = 4 分

依题意图中阴影部分的面积为: $(4s - 2s) + s = 7$, $\Rightarrow 3s = 7$. ———— + 3 = 7 分

则最大圆内空白处的总面积 = $9s - (4s + s) + 2s = 6s = 14 \text{ (cm}^2\text{)}$. ———— + 3 = 10 分

7. 如图所示，正方形 $ABCD$ 和正方形 $BEFG$ 边长分别为 a 和 b ， $a:b=2:5$ ，若 $\triangle ACF$ 的面积是 6cm^2 ，求 $\triangle CEF$ 的面积。



第 7 题图

解答：由 $a:b=2:3$ ， $b=\frac{5}{2}a$ ， $CE=\frac{3}{2}a$ ，

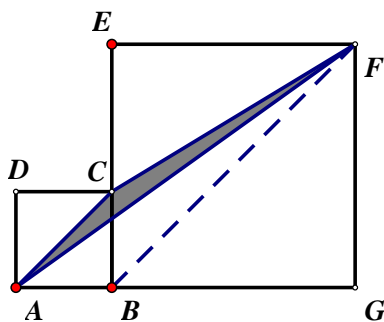
_____ 2 分

如图，连结 BF ，则 $\angle CAB = \angle FBG = 45^\circ$ ，则 $AC \parallel BF$ ，从而底为 AC 的三角形 $\triangle ACF$ 与 $\triangle ACB$ 同底等高，从而面积相等，即： $S_{\triangle FAC} = S_{\triangle BAC} = \frac{1}{2}a^2 = 6$ ， $a^2 = 12$ 。

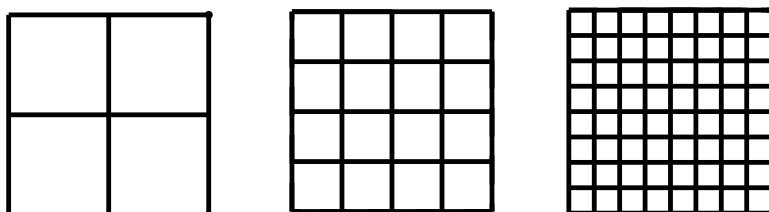
_____ + 6 = 8 分

所以 $\triangle CEF$ 的面积 $= \frac{1}{2} \times EF \times CE = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2}a \right) \left(\frac{3}{2}a \right) = \frac{15a^2}{8} = \frac{15 \times 12}{8} = \frac{45}{2} \text{ (cm}^2\text{)}。$

_____ + 2 = 10 分



8. 通过折纸的手段将一个正方形的每边两等分（对折）、四等分（再对折）、八等分（再对折）等等，都是轻而易举的（如图，虚线为折痕）。请问，你能否在正方形的每边四等分、八等分的基础上，通过折纸将其每边三等分、七等分？能否五等分呢？若能，请在图中用虚线画出你的折痕(用字母标出折痕经过的点)；若不能，请说明理由。



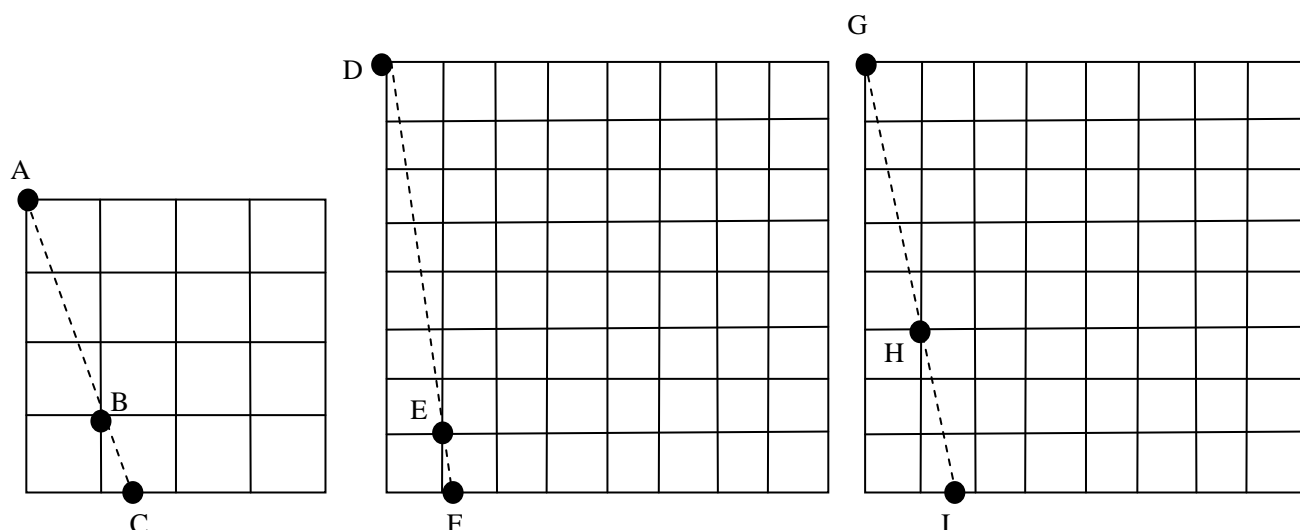
第 8 题图

【参考答案】答案不唯一，合理即可。（只要给出一边的一个等分点，即认可可以做出相应的等分）

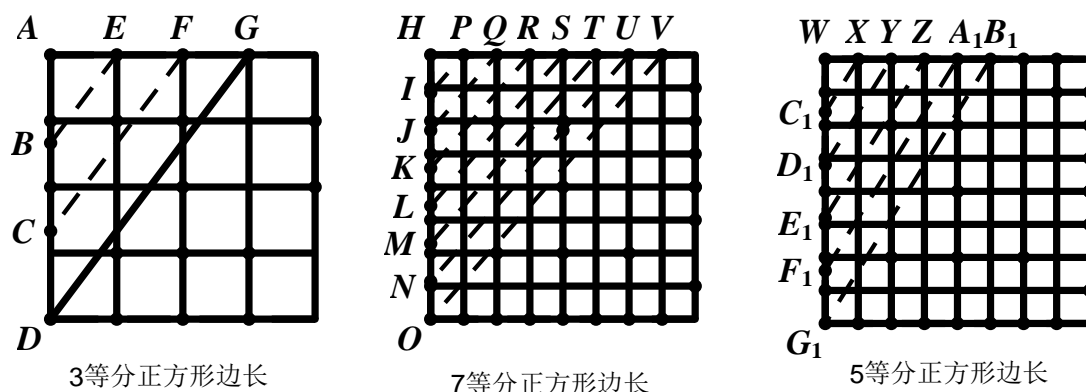
三等分、七等分、五等分分别占 3、3、4 分



典型参考做法一（C、F、I 分别为底边的三等分点、七等分点、五等分点）：



典型参考做法二（图形右边被等分）：



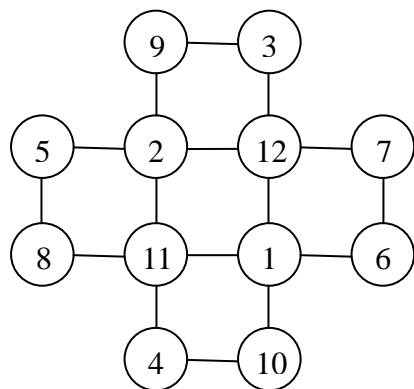
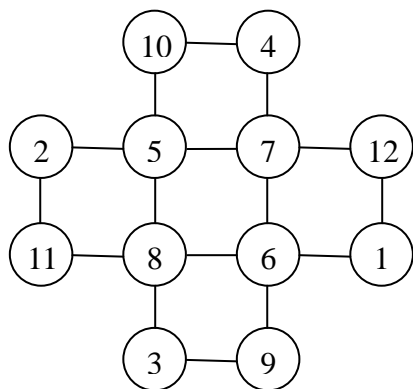
9. 请将 **1,2,3,4, ..., 11,12** 共 **12** 个数填入下列“井”字图形的 **12** 个○内，要求：

(1) 每个数都用一次；

(2) 每个“口”字四个角上四个数之和均相等，四条直线上四个数之和也相等，且等于各“口”字四个角上四个数之和。

解：填法不唯一，写出满足条件的一种填法即可。以下是两种填法，由此旋转、反射的结果也对。

要点：四个数之和必然是 26。（五个口占 5 分，四条线占 5 分；全对给 10 分）



10. 明明的 **QQ** 号是由五个不同的数字组成的五位数，他把号码口头告诉了 **A、B、C** 三位同学。可惜他们都没有记住。**A** 记的是“**23865**”，**B** 记的是“**32856**”，**C** 记的是“**56328**”。如果 **ABC** 三人每个人记的五位数中，位置和数字均正确的都只有两位，而且位置不相邻，请问明明的 **QQ** 号是多少？写出结果，并说明分析的过程。

【参考答案】

解：

答案（4 分）：明明的 **QQ** 号是 **36825**

分析过程（6 分）：

把 **ABC** 三人记的结果排列如下：

A 23865

B 32856

C 56328

由于每个人记对了两个位置，三个人共记对六个位置，总共五位数，由抽屉原理，必然有一位是两个人都记对了，在三人说记的数中，只有百位数出现了两个相同的数字 8，故 8 是 **AB** 二人共同记对的数字；

于是 **C** 记对的只能是十位数和千位数 2、6；

B 除了百位 8 外，还应记住了万位 3 或个位 6，但由于 6 已经在千位出现，不能重复，故 **B** 记对的数是万位 3；

最后，**A** 记对的是百位 8 和个位 5。

————— 3 分

————— + 1 = 4 分

————— + 1 = 5 分

————— + 1 = 6 分

11. 张老师、王老师、李老师三人的年龄为三个连续的自然数，其中张老师 28 岁，他们三人分别教数学、语文和英语。已经知道：

- (1) 李老师比英语教师年龄大；
- (2) 张老师和语文教师不同岁；
- (3) 语文教师比王老师年龄小。

请判断一下，数学、语文、英语教师分别是谁？他们的年龄各为多大？写出结果，并说明分析的过程。

解：

答案（4 分，身份和年龄各 2 分）：数学、语文、英语教师分别是王老师、李老师、张老师；他们的年龄分别为 30、29、28 岁。

分析过程（6 分）：

由（2）（3），王老师、张老师都不是语文老师，所以李老师是语文老师。 ———— 3 分
再由此结合（1）（3），李老师比王老师小、比英语老师大，说明王老师不是英语老师，所以王老师是数学老师，从而张老师是英语老师。 ————— + 2 = 5 分

因此三位老师的年龄顺序是：王老师 > 李老师 > 张老师。

所以张老师 28、李老师 29、王老师 30。 ————— + 1 = 6 分

12. 某疗养院共有 100 个床位，床号为 1、2、3、...、100，依次分布在三种不同类型的病房内：单人房、双人房、三人房（每种类型至少有 1 间，前几间是单人房，接下来几间是双人房，最后几间为三人房）。

- (1) 最少有多少间房？
- (2) 最多有多少间房？

(3) 如果其中有 13 个单人房，并且 52、53 号床在同一个房间，58、59 号床不在同一个房间，问这里共有多少个房间？

写出结果，并说明分析的过程。

解：

答案（3 分）：(1) 最少 35 个房间；(2) 最多 97 个房间；(3) 这时安排 49 个房间。

分析过程（7 分）：

(1) 要使房间数最少，必须尽可能多安排三人房。单人、双人各保留 1 个，安排三张床，其余 97 张床可以安排 32 个三人房，一个单人房。所以房间数为 35 个； ———— 1 分

(2) 要使房间数最多，必须尽可能多安排单人房。三人、双人各保留 1 个，安排五张床，其余 95 张床可以安排 95 个单人房。所以房间数为 97 个； ————— + 1 = 2 分

(3) 如果其中有 13 个单人房，安排第 1—13 号床，之后为双人间，双人间结束的房号一定是奇数； ————— + 1 = 3 分

由于最后的房间全部是 3 人间，100 号是 3 的倍数加 1，所以双人间的最后一个房号又必须是 3 的倍数加 1。所以双人间的最后一个房号既是奇数，又是 3 的倍数加 1，只能是 6 的倍数加 1。 ————— + 2 = 5 分

由于 58、59 号床不在同一个房间，说明 58 是某个房间结束的房号，58 是偶数，所以，双人间在 58 号床之前已经结束，这些可能的床号有 55、49、43 等；如果双人房在 49 号或之前结束，则之后的三人房结束房号依次为 52、55 等，但 52、53 号床在同一个房间，所以双人间只能在 55 号床结束。此时共安排 $55-13=42$ 个床，21 个房间；剩下 45 张床安排 15 个三人房。共安排 $13+21+15=49$ 个房间。 ————— + 2 = 7 分